следующих 8 призм — через u_3 и v_3 и т. д., тогда мы получим искомый результат, если докажем, что

$$F:G = u_1:v_1 = u_2:v_2 = u_3:v_3 = \ldots A':B'$$

и доказательство путем исчерпывания дает тогда (в 5):

$$A:B = F:G.$$

Значение употребленного здесь приема выступает особенно отчетливо, если обратить внимание на то, что теорема 3 содержит условия, обеспечивающие согласно X, 1 то, что

$$A = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots, \text{ и т. д. ad infinitum.}$$

Это соображение вызывает желание исследовать более тщательным образом рассматриваемый сходящийся ряд. Нетрудно заметить (как это делает отчасти и сам Эвклид в XII, 4), что каждая из двух равных призм, сумма которых равна u_1, подобна двум из 4 равных призм в u_2 и т. д., откуда следует:

$$u_2 = \frac{1}{4}u_1, \quad u_3 = \frac{1}{4}u_2 \ldots,$$

или же

$$A = u_1\left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{4}{3}u_1 = \frac{1}{3}u_0,$$

где u_0 обозначает призму, имеющую ту же высоту и ту же площадь основания, что и пирамида P. Нетрудно, впрочем, подтвердить правильность этого вывода с помощью доказательства путем исчерпывания.

Эвклид, правда, не пользуется этим способом. Если, тем не менее, мы сочли необходимым привести его здесь, где мы желаем познакомиться с методами не только Эвклида, но вообще древних математиков, то потому, что (как мы покажем вскоре) Архимед действительно *пользуется абсолютно тем же самым методом суммирования бесконечного ряда для определения площади параболического сегмента.*

Вместо этого суммирования Эвклид для вычисления объема треугольной пирамиды прибегает в теореме 7 к известному разделению треугольной призмы на три пирамиды. Мы считаем лишним останавливаться на переходе к пирамидам с многоугольным основанием, а также на переходе от призм и пирамид к цилиндрам и конусам, — переходе, совершаемом, разумеется, с помощью доказательства путем исчерпывания.

Но приводимое в теореме 18 доказательство, что объемы шаров пропорциональны кубам радиусов, представляет большие трудности, ибо здесь невозможно составить столь простые приближенные значения, как в случае площади круга. Поэтому Эвклид, прежде чем дать это доказательство, решает предварительно следующую задачу (17): вписать в данный шар многогранник, объемлющий целиком другой, концентрический и меньший